Correction TD - O3

Exercices à maîtriser

Ex. n°1 • Cascade inférieure du Yellowstone ★★☆ 1935

1) On note AB la cascade, située à une distance OA de l'appareil photo. On note A′B′ l'image de AB sur le capteur CCD. Le paramètre recherché est la hauteur AB. Pour le trouver, on utilise la formule du grandissement :

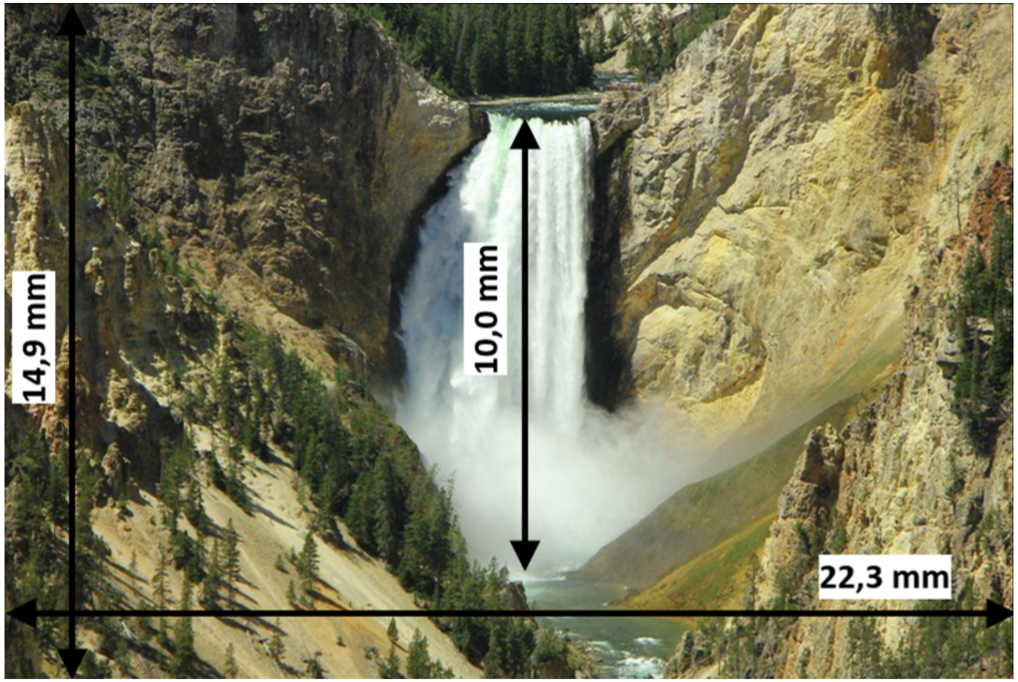
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{AB} = \overline{A'B'} \times \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}}$$

Pour trouver AB, il faut donc déterminer les trois paramètres A′B′, OA et OA′.

La distance OA se déduit de la carte accompagnée de sa légende. On trouve par simple lecture, $\boxed{\overline{OA} = -1400 \text{ m}}$

La distance OA′ peut se déterminer soit en supposant que la cascade est à l'infini, dans ce cas l'image se forme dans le plan focale image de la lentille : $\boxed{\overline{OA'} = f' = 135 \text{ mm}}$

Finalement, la distance A′B′ correspond à la taille de l'image de la cascade sur le capteur. Or, on sait que le capteur mesure 14,9 mm de hauteur.



On en déduit donc : $\boxed{\overline{A'B'} \simeq -10 \text{ mm}}$

Ainsi :

$$\boxed{\overline{AB} = \overline{A'B'} \times \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \simeq 104 \text{ m}}$$

Ce résultat est parfaitement cohérent : il s'agit de la hauteur typique d'une grande cascade.

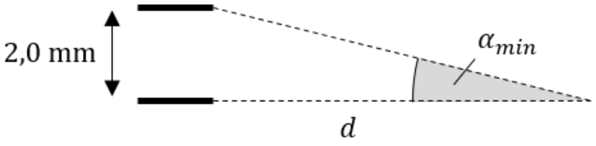
Remarque : la véritable hauteur est 106 m. On est donc très proche !

2) Il faut diminuer le temps d'exposition. Pour ne pas toucher à la luminosité, il fut alors ouvrir le diaphragme.

Ex. n°2 • Pouvoir séparateur de l'œil ★☆☆ 5629

1) L'œil a un pouvoir séparateur de l'ordre de : $\boxed{\alpha_{min} \simeq 1' \simeq 3 \times 10^{-4} \text{ rad}}$

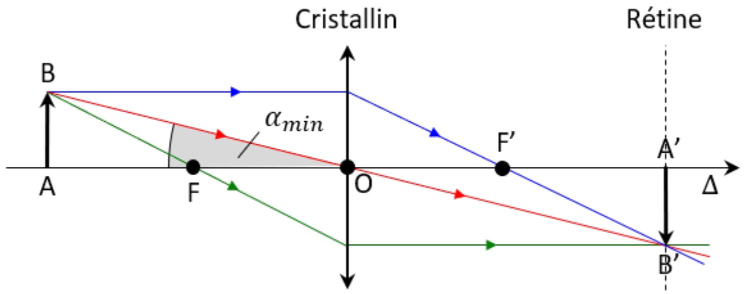
2) On cherche la distance d telle que les deux traits soient vus sous l'angle α_{min}.



Ainsi, puisque $\alpha_{min} \ll 1$ rad, on a :

$$d = \frac{2{,}0 \times 10^{-3}}{\tan(\alpha_{min})} \simeq \frac{2{,}0 \times 10^{-3}}{\alpha_{min}} = \boxed{7 \text{ m}}$$

3) Soit un objet AB situé à une distance OA de l'œil. À la limite de la résolution de l'œil, l'objet est vu sous un angle α_{min}.



Cette limite de résolution correspond au cas où l'image est de l'ordre de la taille d'un récepteur (appelée $d_{\text{récep}} = \text{A}'\text{B}'$). En effet, dans le cas d'un objet plus petit la lumière incidente n'active qu'un seul récepteur et on ne distingue pas les points A et B. Ainsi :

$$\alpha_{min} \simeq \tan(\alpha_{min}) = \frac{\text{A}'\text{B}'}{\text{OA}'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d_{\text{récep}} = \text{OA}' \times \alpha_{min} \simeq 5{,}5 \ \mu\text{m}}$$

Pour aller plus loin

Ex. n°3 • Correction des défauts de l'œil ★★☆ 6801

1) Relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{\text{OA}'}} - \frac{1}{\overline{\text{OA}}} = V \quad \text{avec :} \quad \overline{\text{OA}'} = \ell_0 = 15{,}0 \text{ mm}$$

Au PR :

$$\overline{\text{OA}} = -d_{\text{PR}} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{\text{PR}} = 66{,}7 \ \delta}$$

Au PP :

$$\overline{\text{OA}} = -d_{\text{PP}} = -25 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{\text{PR}} = 70{,}7 \ \delta}$$

2) On a immédiatement :

$$\boxed{\Delta V = V_{\text{PP}} - V_{\text{PR}} = 4{,}0 \ \delta}$$

3) Lorsqu'il est au repos (PR), la relation de conjugaison donne :

$$\frac{1}{\overline{\text{OA}'}} - \frac{1}{\overline{\text{OA}}} = V_{\text{PR}} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \overline{\text{OA}'} = \ell_{\text{m}} = 15{,}2 \text{ mm} \\ \overline{\text{OA}} = -d_{\text{PR,m}} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\boxed{d_{\text{PR,m}} = \left(V_{\text{PR}} - \frac{1}{\ell_{\text{m}}}\right)^{-1} = 1{,}14 \text{ m}}$$

L'œil myope ne voit pas de loin.

Lorsqu'il est accommode au maximum (PP), la relation de conjugaison donne :

$$\frac{1}{\overline{\text{OA}'}} - \frac{1}{\overline{\text{OA}}} = V_{\text{PP}} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \overline{\text{OA}'} = \ell_{\text{m}} = 15{,}2 \text{ mm} \\ \overline{\text{OA}} = -d_{\text{PP,m}} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\boxed{d_{\text{PP,m}} = \left(V_{\text{PP}} - \frac{1}{\ell_{\text{m}}}\right)^{-1} = 20 \text{ cm}}$$

4) On note V_{m} la vergence de la lentille de contact à utiliser pour corriger cet œil myope. La lentille de contact et le cristallin étant accolés, on peut utiliser la relation de l'énoncé.

On souhaite trouver V_{m} pour que le PR soit de nouveau à l'infini. La relation de conjugaison donne :

$$\frac{1}{\overline{\text{OA}'}} - \frac{1}{\overline{\text{OA}}} = V_{\text{PR}} + V_{\text{m}} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \overline{\text{OA}'} = \ell_{\text{m}} = 15{,}2 \text{ mm} \\ \overline{\text{OA}} = -d_{\text{PR}} = -\infty \end{cases}$$

On en déduit :

$$\boxed{V_{\text{m}} = \frac{1}{\ell_{\text{m}}} - V_{\text{PR}} = -0{,}88 \ \delta}$$

La lentille correctrice est divergente.

5) Lorsqu'il est au repos (PR), la relation de conjugaison donne :

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} = V_{\mathrm{PR}} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \overline{\mathrm{OA'}} = \ell_{\mathrm{h}} = 14{,}8 \text{ mm} \\ \overline{\mathrm{OA}} = -d_{\mathrm{PR,h}} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\boxed{d_{\mathrm{PR,h}} = \left(V_{\mathrm{PR}} - \frac{1}{\ell_{\mathrm{h}}}\right)^{-1} = -1{,}11 \text{ m}}$$

Le PR est virtuel. L'œil hypermétrope peut donc voir jusqu'à l'infini, mais en accommodant.

Lorsqu'il est accommode au maximum (PP), la relation de conjugaison donne :

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} = V_{\mathrm{PP}} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \overline{\mathrm{OA'}} = \ell_{\mathrm{h}} = 14{,}8 \text{ mm} \\ \overline{\mathrm{OA}} = -d_{\mathrm{PP,h}} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\boxed{d_{\mathrm{PP,h}} = \left(V_{\mathrm{PP}} - \frac{1}{\ell_{\mathrm{h}}}\right)^{-1} = 32 \text{ cm}}$$

L'œil hypermétrope ne voit pas de près.

On note V_{h} la vergence de la lentille de contact à utiliser pour corriger cet œil hypermétrope.

On souhaite trouver V_{h} pour que le PR soit de nouveau à l'infini. La relation de conjugaison donne :

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} = V_{\mathrm{PR}} + V_{\mathrm{h}} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \overline{\mathrm{OA'}} = \ell_{\mathrm{h}} = 14{,}8 \text{ mm} \\ \overline{\mathrm{OA}} = -d_{\mathrm{PR}} = -\infty \end{cases}$$

On en déduit :

$$\boxed{V_{\mathrm{h}} = \frac{1}{\ell_{\mathrm{h}}} - V_{\mathrm{PR}} = 90\ \delta}$$

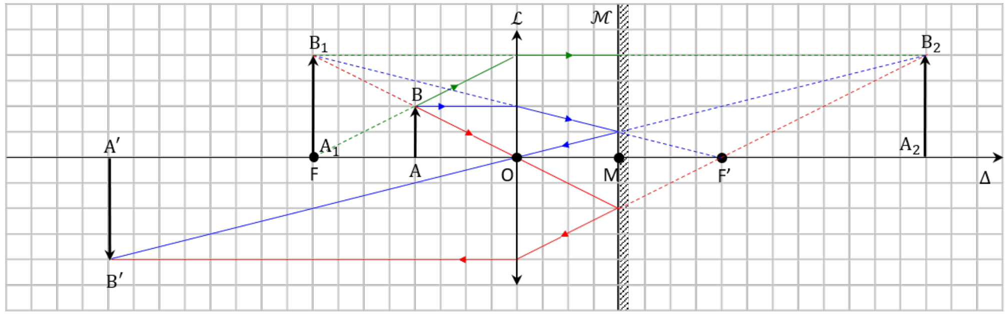
La lentille correctrice est convergente.

Ex. n°4 • Miroir placé dernière une lentille ★★☆ 2334

1) L'objet AB donne, à travers le système optique, les différentes images intermédiaires suivantes :

$$\mathrm{AB} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathrm{A_1B_1} \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathrm{A_2B_2} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathrm{A'B'}$$

On représente les rayons sur le schéma ci-dessous. D'après le graphique, l'image est réelle, renversée, et agrandie d'un facteur 2.



L'image est réelle car le miroir inverse le sens de parcours de la lumière.

2) Nous allons retrouver ces propriétés par le calcul. On a :

$$\overline{\mathrm{OA}} = -\frac{f'}{2}$$

Étape : $\left(\mathrm{AB} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathrm{A_1B_1}\right)$. Relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{\mathrm{OA_1}} = \left(\frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} + \frac{1}{f'}\right)^{-1} = -f'}$$

Relation de grandissement :

$$\boxed{\gamma_1 = \frac{\overline{\mathrm{OA_1}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = 2}$$

Étape : $\left(\mathrm{A_1B_1} \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathrm{A_2B_2}\right)$. Relation de conjugaison :

$$\mathrm{MA_1} = \mathrm{MA_2} = \frac{3f'}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{\mathrm{OA_2}} = 2f'}$$

Relation de grandissement :

$$\boxed{\gamma_2 = 1}$$

Attention, après que la lumière ait été réfléchie par le miroir, il faut penser inverser les points F et F' de la lentille (la lumière va de droite à gauche). Cela revient à changer f' en $-f'$ dans les formules.

$$\boxed{\overline{\mathrm{OA'}} = \left(\frac{1}{\overline{\mathrm{OA_2}}} + \frac{1}{-f'}\right)^{-1} = -2f'} \quad \text{et} \quad \boxed{\gamma_3 = \frac{\overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OA_2}}} = -1}$$

Finalement, on obtient une image réelle (car le sens de parcours de la lumière a été inversée), positionnée en $\boxed{\overline{\mathrm{OA'}} = -2f'}$ et de grandissement $\boxed{\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2 \times \gamma_3 = -2}$.

3) En reprenant les équations de la question précédente mais en injectant $\overline{\mathrm{OA}} = -f'$, on obtient : $\overline{\mathrm{OA_1}} = \infty$, $\overline{\mathrm{OA_2}} = \infty$ et enfin $\boxed{\overline{\mathrm{OA'}} = -f'}$.

Autre démonstration :

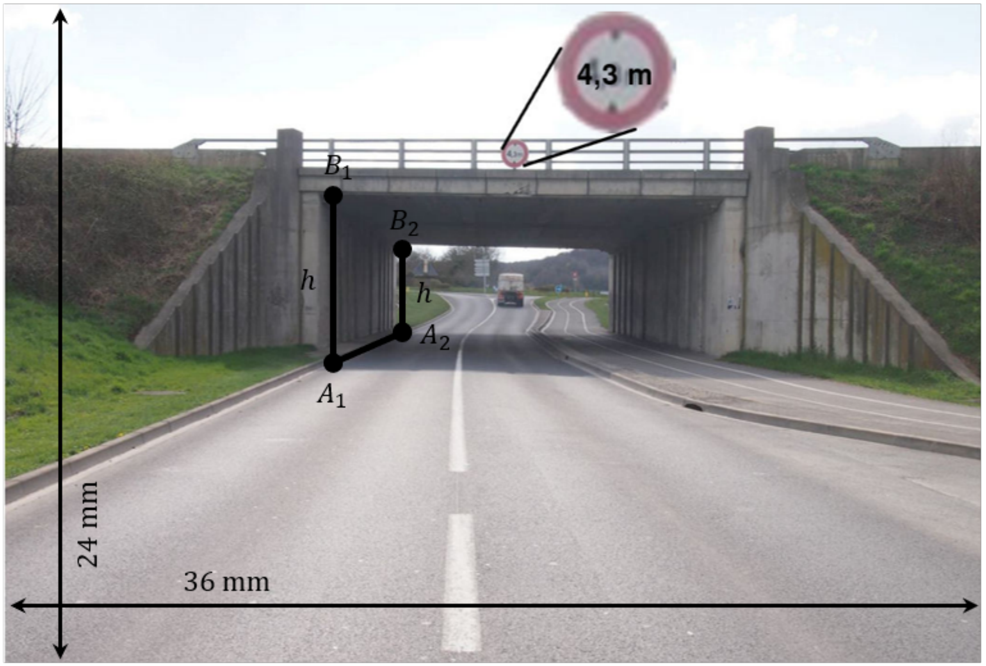
$$\mathrm{A} = \mathrm{F} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathrm{A_1}\,(\infty) \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathrm{A_2}\,(\infty) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathrm{A'} = \mathrm{F'}$$

Attention, dans la dernière étape, le point $\mathrm{F'}$ est le point obtenu après inversion de F et $\mathrm{F'}$ (nouveau $\mathrm{F'}$, ancien F). On a donc $\mathrm{A} = \mathrm{A'}$.

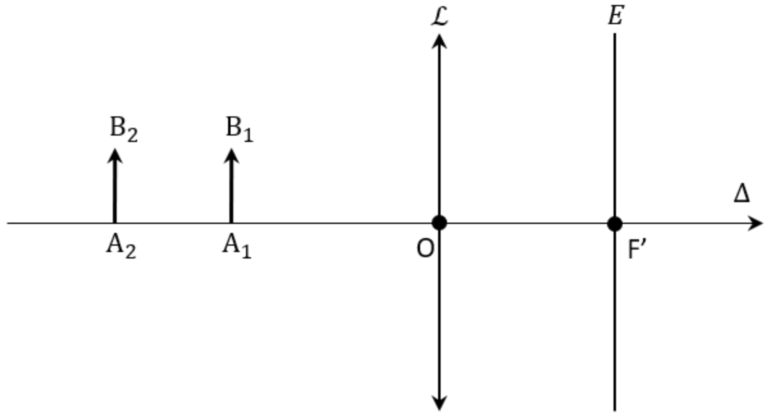
4) C'est l'auto-collimation.

Ex. n°5 • Estimation de la largeur d'un pont ★★★ 4725

On utilise les notations ci-dessous.



Avec un schéma traditionnel d'optique, la situation devient :



On cherche la distance $\mathrm{A_1A_2}$. On note O le centre de la lentille de l'appareil photo. On a : $\mathrm{A_1A_2} = \overline{\mathrm{OA_1}} - \overline{\mathrm{OA_2}}$. Il faut donc déterminer les distances $\overline{\mathrm{OA_1}}$ et $\overline{\mathrm{OA_2}}$.

On utilise les formules de grandissement ($k = 1$ ou 2).

$$\gamma = \frac{\overline{\mathrm{A}'_k\mathrm{B}'_k}}{\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k}} = \frac{\overline{\mathrm{OA}'_k}}{\overline{\mathrm{OA}_k}} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{OA}_k} = \overline{\mathrm{OA}'_k}\,\frac{\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k}}{\overline{\mathrm{A}'_k\mathrm{B}'_k}}$$

La hauteur du pont est connue : $\boxed{\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k} = h = 4{,}3\ \mathrm{m}}$

Le pont est supposé à l'infini (c'est-à-dire que $\mathrm{OA_1} \gg f'$). L'image se trouve donc dans le plan focal image de la lentille :

$$\boxed{\overline{\mathrm{OA}'_k} \simeq f' = 35\ \mathrm{mm}}$$

Enfin, on sait que le capteur fait 24 mm × 36 mm, ce qui permet, à l'aide d'un produit en croix (8,7 cm ↔ 24 mm), de déterminer $\overline{\mathrm{A}'_k\mathrm{B}'_k}$. On trouve (en négatif car les images sont inversées) :

$$\boxed{\overline{\mathrm{A}'_1\mathrm{B}'_1} = -2{,}1 \times \frac{24}{8{,}7} = -5{,}8\ \mathrm{mm}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{\mathrm{A}'_2\mathrm{B}'_2} = -1{,}1 \times \frac{24}{8{,}7} = -3{,}0\ \mathrm{mm}}$$

On en déduit :

$$\boxed{\mathrm{A_1A_2} = \overline{\mathrm{OA_1}} - \overline{\mathrm{OA_2}} = f'h\left(\frac{1}{\overline{\mathrm{A}'_1\mathrm{B}'_1}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{A}'_2\mathrm{B}'_2}}\right) \simeq 24\ \mathrm{m}}$$

Pour s'entraîner au DS

Ex. n°6 • Microscope optique 1206

1) On a :

$$\Delta = \overline{\mathrm{F}_1'\mathrm{F}_2} = \overline{\mathrm{F}_1'\mathrm{O}_1} + \overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2} + \overline{\mathrm{O}_2\mathrm{F}_2} = -f_1' + \Delta - f_2' = 100 \text{ mm}$$

2) On note :

$$\mathrm{A} \xrightarrow{\mathcal{L}_1} \mathrm{A}_1 = \mathrm{F}_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \mathrm{A}'$$

On utilise donc la relation de conjugaison de Descartes, avec $d = -\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{A}}$:

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{A}}} = \frac{1}{f_1'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f_1' + \Delta} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f_1'}$$

On en déduit :

$$\boxed{d = \left(\frac{1}{f_1'} - \frac{1}{f_1' + \Delta}\right)^{-1} = \frac{f_1'\,(f_1' + \Delta)}{\Delta} = 5{,}25 \text{ mm}}$$

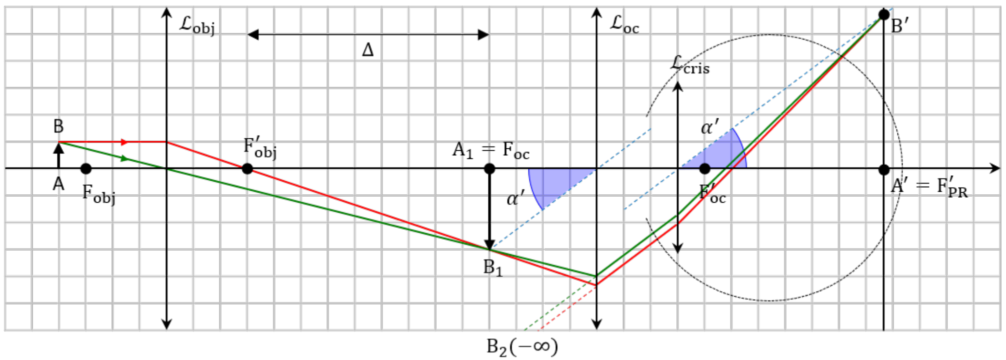
3) Formule de grandissement de Descartes :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1}}{\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{A}}} = -\frac{f_1' + \Delta}{d} = \boxed{-\frac{\Delta}{f_1'} = -20}$$

L'image est donc renversée ($\gamma_1 < 0$).

4) L'objet intermédiaire étant dans le plan focal objet de l'oculaire, l'image finale sera à l'infini, permettant ainsi une observation sans accommodation.

5)



6) Cela correspond au PP de l'œil emmétrope, c'est-à-dire la distance de mise au point de l'œil lorsqu'il accommode au maximum.

7) On a :

$$\tan(\alpha') = \alpha' = \frac{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}{f_2'} \quad \text{et} \quad \tan(\alpha) = \alpha = \frac{\mathrm{AB}}{D}$$

On en déduit :

$$G = \left|\frac{\alpha'}{\alpha}\right| = \frac{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}{f_2'} \times \frac{\mathrm{AB}}{D} = \frac{|\gamma_1|\,D}{f_2'} = \boxed{\frac{\Delta D}{f_1' f_2'} = 333}$$

Ex. n°7 • Photographie d'un papillon 7674

1) On a $\overline{\mathrm{OA}} = -d_p$ et on cherche $\overline{\mathrm{OA}'} = D$. La relation de conjugaison de Descartes donne :

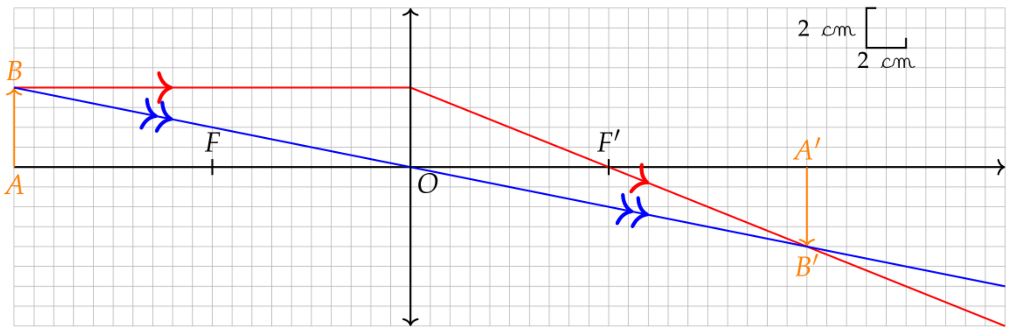
$$\frac{1}{D} - \frac{1}{-d_p} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \left(\frac{1}{f'} - \frac{1}{d_p}\right)^{-1} = 20 \text{ cm}}$$

Le grandissement vaut :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{\mathrm{OA}'}}{\overline{\mathrm{OA}}} = -\frac{D}{d_p} = -1}$$

L'image est de même taille et renversée. On a donc : $\boxed{h_p' = 4{,}0 \text{ cm}}$

2)



3) Avec cet objectif, on réalise la suite de conjugaison suivante : $\mathrm{A} \xrightarrow{\mathcal{L}_1} \mathrm{A}_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \mathrm{A}' = \mathrm{P}$.

Utilisons la relation de conjugaison de Descartes avec la lentille $\mathcal{L}_1$ avec $\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{A}} = -d_p$.

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{O_1A_1} = \left(\frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{f_1'}\right)^{-1} = -6{,}67 \text{ cm}}$$

On en déduit la distance entre A_1 et la seconde lentille.

$$\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} = -e + \overline{O_1A_1}$$

On utilise la relation de conjugaison de Descartes avec la seconde lentille.

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f_2'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D' = \overline{O_2A'} = \left(\frac{1}{f_2'} + \frac{1}{-e + \overline{O_1A_1}}\right)^{-1} = 8{,}3 \text{ cm}}$$

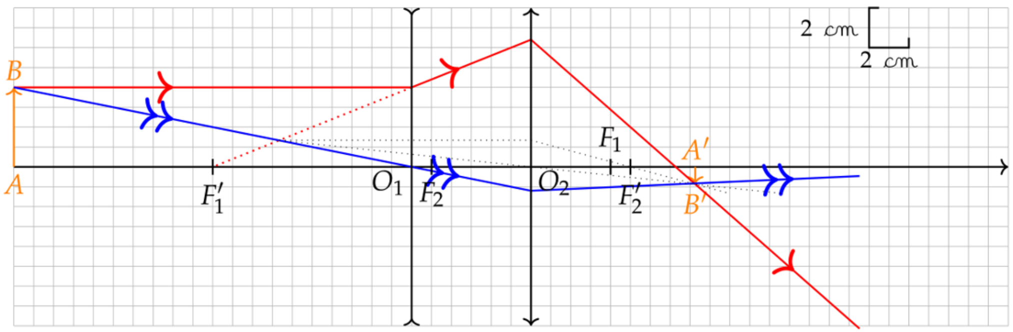
Pour trouver la taille de l'image, utilisons les formules de grandissement. On a :

$$\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2 = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \times \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{-d_p} \times \frac{D'}{-e + \overline{O_1A_1}}$$

Ainsi,

$$\boxed{h_p' = h_p \times |\gamma| = \frac{D' h_p}{d_p} \times \frac{\overline{O_1A_1}}{-e + \overline{O_1A_1}} = 0{,}87 \text{ cm}}$$

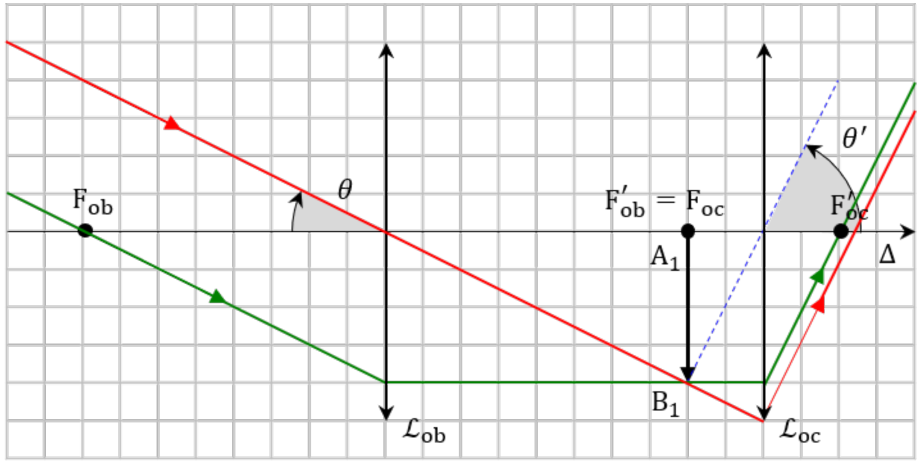
4)



5) L'image avec le premier objectif est plus grande que celle avec l'objectif alternatif. On aura donc plus de détails avec l'objectif standard. L'objectif alternatif permet de réduire l'encombrement de l'appareil photo.

Ex. n°8 • Lunette astronomique ★★☆ 8716

1)

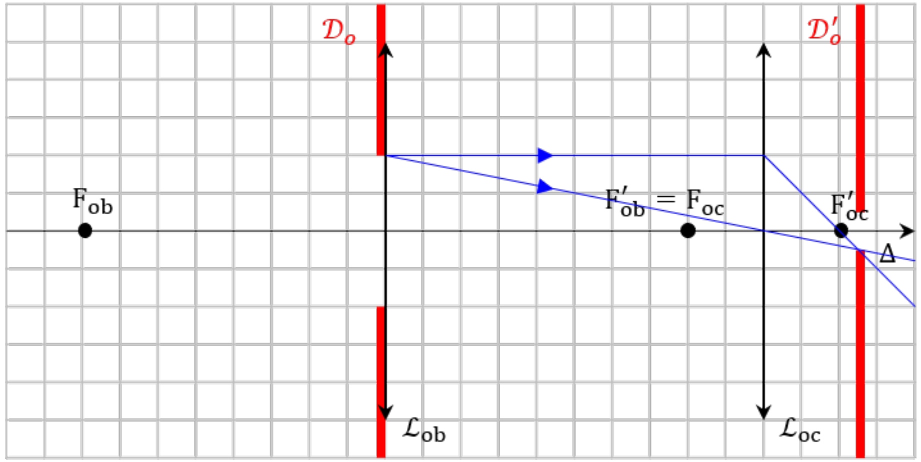


L'image est à l'infini hors de l'axe optique. Elle est renversée (les rayons ont changé de sens), réelle et agrandie ($\theta' > \theta$).

2) On a :

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\tan(\theta')}{\tan(\theta)} = \frac{A_1B_1/f'_{oc}}{A_1B_1/f'_{ob}} = \boxed{\frac{f'_{ob}}{f'_{oc}} = 4}$$

3) Pour trouver le cercle oculaire, il suffit de trouver l'image des extrémités du diaphragme $\mathcal{D}_0$ (voir schéma ci-dessous).



4) Transformation (avec C le centre du cercle oculaire) : $\mathrm{O_{ob}} \xrightarrow{\mathcal{L}_{oc}} \mathrm{C}$.

Relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{O_{oc}C}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{O_{oc}O_{ob}}}} = \frac{1}{f'_{\mathrm{oc}}} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{O_{oc}C}} = \left(-\frac{1}{f'_{\mathrm{ob}} + f'_{\mathrm{oc}}} + \frac{1}{f'_{\mathrm{oc}}}\right)$$

Après simplification :

$$\boxed{\overline{\mathrm{O_{oc}C}} = \frac{f'_{\mathrm{oc}}\,(f'_{\mathrm{ob}} + f'_{\mathrm{oc}})}{f'_{\mathrm{ob}}}}$$

Grandissement :

$$\gamma = \frac{\mathcal{D}'_0}{\mathcal{D}_0} = \frac{\overline{\mathrm{O_{oc}C}}}{\overline{\mathrm{O_{oc}O_{ob}}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{D}'_0 = \mathcal{D}_0 \times \frac{f'_{\mathrm{oc}}}{f'_{\mathrm{ob}}}}$$

5) Il faut placer l'œil sur le cercle oculaire, car c'est là que l'on collecte le plus de lumière.

Le diaphragme d'ouverture joue sur la luminosité de l'image (comme l'iris pour un œil).

6) Bilan :

	Lune	Vénus	Mars
Distance (m)	$3{,}82 \times 10^{8}$	$8{,}12 \times 10^{10}$	$7{,}85 \times 10^{10}$
Diamètre (m)	$3{,}52 \times 10^{6}$	$1{,}21 \times 10^{7}$	$6{,}79 \times 10^{6}$
$\alpha_{\text{œil}} = \dfrac{\text{Diam.}}{\text{Dist.}}$ (rad)	$9{,}2 \times 10^{-3}$	$1{,}5 \times 10^{-4}$	$8{,}6 \times 10^{-5}$
$\alpha_{\text{œil}} > 1'$?	Oui	Non	Non
$\alpha_{\text{lunette}} = G \times \alpha_{\text{œil}}$ (rad)	$3{,}7 \times 10^{-2}$	$6{,}0 \times 10^{-4}$	$3{,}5 \times 10^{-4}$
$\alpha_{\text{lunette}} > 1'$?	Oui	Oui	Oui